Section A_1 DEUXIEME EPREUVE (4 heures)

On désigne, dans tout le problème, par $(m_n)_{n \in \mathbf{N}}$, une suite de termes réels strictement positifs vérifiant

$$(*) \begin{cases} m_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbf{N} \quad (m_{n+1})^2 \leqslant m_n . m_{n+2} \end{cases}$$

et par **L** l'ensemble des fonctions f, définies sur **R** et à valeurs dans **R**, indéfiniment dérivables et vérifiant

$$\forall\, x \in \mathbf{R} \quad \forall\, n \in \mathbf{N} \qquad |f^{(n)}(x)| \leqslant m_n$$

(où $f^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f, la dérivée $0^{\text{ième}}$ étant, par convention, la fonction f elle-même).

On considère les propriétés suivantes :

(P_1) : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{m_{n+1}}$ est une série convergente.

(P_2) : Il existe a et b réels et une fonction f appartenant à **L** tels que $(\forall\, n \in \mathbf{N} \quad f^{(n)}(a) = 0)$ et $(f(b) \neq 0)$.

(P_3) : Il existe a et b réels et une fonction f appartenant à **L** tels que $(\forall\, x \in]-\infty, a] \quad f(x) = 0)$ et $(\forall\, x \in [b, +\infty[\quad f(x) = 1)$.

(P_4) : Il existe a, b et c réels et une fonction f appartenant à **L** tels que $(\forall\, x \in]-\infty, a] \quad f(x) = 0)$, $(\forall\, x \in [b, +\infty[\quad f(x) = 0)$ et $(f(c) = 1)$.

I

On suppose, dans cette partie,

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \qquad m_n = n\,!$$

(La propriété $(*)$ est par conséquent vérifiée.)

Montrer qu'aucune des propriétés (P_i) $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ n'est vérifiée.

(Pour démontrer que (P_2) n'est pas vérifiée, on utilisera des développements de Taylor des éléments de **L**).

La suite du problème, indépendante de I, *consiste à démontrer, pour une suite* $(m_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *arbitraire vérifiant* $(*)$, *l'équivalence des quatre propriétés* (P_i) $(1 \leqslant i \leqslant 4)$. *Les parties* II *et* III *sont indépendantes.*

II

On suppose, dans cette partie, que la propriété (P_1) est vérifiée et on pose, pour tout $n \geqslant 1$

$$\delta_n = 2\,\frac{m_{n-1}}{m_n}$$

et $\qquad \delta_0 = 1.$

On pose aussi

$$b = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n$$

et on note f_0 la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$f_0(x) = 0$ si $x \leqslant 0$, $\quad f_0(x) = x$ si $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\quad f_0(x) = 1$ si $x \geqslant 1$.

On définit, à partir de f_0, la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ par la relation de récurrence

$$\forall\, n \geqslant 1 \qquad \forall\, x \in \mathbf{R} \qquad f_n(x) = \frac{1}{\delta_n} \int_{x-\delta_n}^{x} f_{n-1}(t)\, dt\,.$$

1° Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est bien définie et que, pour tout n, f_n est n fois dérivable, la dérivée $n^{\text{ième}}$ étant continue.

2° Montrer

$$\forall\, x \in \mathbf{R} \qquad \forall\, n \in \mathbf{N} \qquad \forall\, r \in \mathbf{N} \qquad (r \leqslant n) \Rightarrow (\,|f_n^{(r)}(x)| \leqslant m_r)$$

(on pourra commencer par démontrer

$$\forall\, x \in \mathbf{R} \qquad \forall\, n \in \mathbf{N} \qquad |f_n^{(n)}(x)| \leqslant m_n).$$

3° Montrer

$$\forall\, x \in \mathbf{R} \qquad \forall\, n \in \mathbf{N} \qquad \forall\, r \in \mathbf{N}$$
$$((r+2) \leqslant n) \Rightarrow (\,|f_n^{(r)}(x) - f_{n-1}^{(r)}(x)| \leqslant m_{r+1}\,\delta_n)\,.$$

4° En déduire que la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément sur $\mathbf{R}$ vers une fonction f appartenant à $\mathbf{L}$ et que la propriété (P_3) est vérifiée.

III

On suppose, dans cette partie, qu'il existe une fonction f appartenant à $\mathbf{L}$ et deux nombres réels a et b avec

$(a < b)$, $\qquad (\forall\, n \in \mathbf{N} \qquad f^{(n)}(a) = 0)$ $\qquad$ et $\qquad (f(b) = 1)$.

On pose, pour tout x appartenant à $\mathbf{R}$ et tout n appartenant à $\mathbf{N}$

$$u_n(x) = \sup \left\{ \frac{|f^{(p)}(x)|}{2^p m_p} \;;\; 0 \leqslant p \leqslant n \right\}.$$

1° Montrer que, pour tout n, la fonction u_n est continue (on pourra, pour cela, utiliser la relation :

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbf{R} \qquad \sup\{\alpha, \beta\} = \frac{1}{2}\,(\alpha + \beta + |\alpha - \beta|)\,).$$

En déduire qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de nombres réels vérifiant :

$$(x_0 = b), \qquad (\forall\, n \in \mathbf{N} \qquad a \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n)$$
$$\text{et} \qquad (\forall\, n \in \mathbf{N} \qquad u_n(x_n) = 2^{-n})\,.$$

2° Montrer

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \forall\, h \in \mathbf{R} \qquad u_n(x_n + h) \leqslant 2^{-n} \exp\left(2\,|h|\,\frac{m_n}{m_{n-1}}\right)$$

où exp désigne la fonction exponentielle de base e (on pourra majorer chaque terme $f^{(p)}(x_n + h)$, pour $0 \leqslant p \leqslant n$, en l'exprimant par la formule de Taylor au point x_n à un ordre convenable).

3° Montrer

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \qquad 2 \leqslant \exp\left[2\,(x_n - x_{n+1})\,\frac{m_{n+1}}{m_n}\right]$$

et en déduire que la propriété (P_1) est vérifiée.

IV

1° Montrer l'équivalence des propriétés (P_1), (P_2) et (P_3).

2° Montrer que, si f et g appartiennent à $\mathbf{L}$,

$$\forall\, x \in \mathbf{R} \quad \forall\, n \in \mathbf{N} \qquad (f.g)^{(n)}(x) \leqslant 2^n m_n$$

où $f.g$ désigne la fonction qui, à tout x, associe le produit des nombres réels $f(x)$ et $g(x)$.

3° En déduire l'équivalence des quatre propriétés (P_i) $\quad (1 \leqslant i \leqslant 4)$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail